ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СИСТЕМЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ [1]

Ю.Г. Смирнов (Пенза)

1 Введение

Гибридные методы стали в последнее время все чаще использоваться для решения внешних электродинамических задач дифракции на системе диэлектрических и идеально проводящих тел [1, 2]. Суть гибридного метода решения задачи дифракции заключается в следующем. Выбирается фиктивная замкнутая поверхность, содержащая систему диэлектрических и идеально проводящих тел. Вне этой поверхности решение задачи выписывается в явном виде с помощью поверхностных потенциалов. Внутри поверхности задача решается каким-либо численным методом, а затем результаты "сшиваются" с помощью условий сопряжения. В результате, кроме уравнений внутри фиктивной поверхности (в объеме), возникают дополнительные поверхностные уравнения на фиктивной поверхности, что и обусловило название метода как гибридного.

Метод позволяет перейти от решения внешней задачи дифракции к решению внутренней задачи с некоторыми дополнительными поверхностными уравнениями. Основным преимуществом данного метода является его универсальность для решения задачи на системе ограниченных тел. Одним из главных недостатков метода является неэллиптичность оператора задачи при решении задачи дифракции электромагнитной волны.

Цель настоящей работы – найти такую новую формулировку гибридного метода, чтобы в результате получить задачу с элли-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №01-01-00053

птическим оператороми. Теоретические основы данного метода были разработаны в работах [3, 6].

Как известно [4], для получения приближенного решения уравнения с эллиптическим оператором удобно использовать метод Галеркина. При этом необходимым и достаточным условием сходимости метода Галеркина является свойство аппроксимации.

Пусть H – гильбертово пространство, H' – антидвойственное к H пространство [4, 5], $A: H \to H'$ – линейный ограниченный инъективный оператор. Пусть $H_n \subset H$ – последовательность подпространств $(n = 1, 2, \ldots)$, предельно плотных в H, то есть обладающих следующим **свойством аппроксимации**:

$$\inf_{\psi \in H_n} ||\psi - \varphi|| \to 0, \quad n \to \infty \tag{1}$$

для всех $\varphi \in H$. Ниже мы всегда предполагаем, что свойство (1) для H_n выполнено (это **необходимое** условие сходимости метода Галеркина).

Рассмотрим операторное уравнение

$$A\varphi = f, \quad \varphi \in H, \quad f \in H' \tag{2}$$

и схему метода Галеркина для приближенного решения этого уравнения

$$\langle A\varphi_n, g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{для всех } g \in H_n, \tag{3}$$

где $\varphi_n \in H_n$ – приближенное решение. Будем считать, что размерность подпространств H_n равна n : $\dim H_n = n$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает отношение двойственности между пространствами H' и H.

Определение 1.1 *Пусть $A: H \to H'$ – инъективный оператор. Будем говорить, что метод Галеркина (3), определенный выбором подпространств $H_n \subset H (n = 1, 2, \ldots)$, аппроксимирующий исходное уравнение (2),* **сходится**, *если существует такое N, что для любого $f \in ImA$ (ImA – образ оператора A) уравнения (3) однозначно разрешимы при всех $n \geq N$ и приближенные решения φ_n сходятся к точному решению φ уравнения (2): $\varphi_n \to \varphi$, $n \to \infty$.*

В этом случае имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости [4]:

$$||\varphi_n - \varphi|| \leq C \inf_{\psi \in H_n} ||\psi - \varphi||, \tag{4}$$

то есть порядок скорости сходимости не ниже порядка аппроксимации в (1).

При анализе сходимости методов Галеркина чаще всего главную роль играет свойство **сильной эллиптичности** оператора A, а именно:

Определение 1.2 *Линейный ограниченный оператор $A : H \to H'$ называется* **сильно эллиптическим**, *если существует компактный оператор $K : H \to H'$ такой, что*

$$\mathcal{R}e\langle(A+K)\varphi, \varphi\rangle \geq \gamma_0||\varphi||^2, \quad \forall \varphi \in H \tag{5}$$

для некоторого $\gamma_0 > 0$.

Имеет место следующий основной результат [4].

Утверждение 1.1 *Для сильно эллиптического оператора A метод Галеркина (3) сходится и справедлива оценка (4).*

Таким образом, условие сильной эллиптичности является **достаточным** условием сходимости метода Галеркина (при выполнении необходимого условия – свойства аппроксимации (1)). В этом случае базисные функции в методе Галеркина можно выбирать **любыми**, лишь бы они удовлетворяли свойству аппроксимации, то есть их линейные оболочки H_n удовлетворяли свойству (1). Как будет показано ниже, это обстоятельство в гибридных методах позволяет выбирать базисные функции на поверхности и в объемной области независимо друг от друга (согласование поверхностных и объемных базисных функций является одной из основных трудностей в гибридных методах [2]).

Из вышесказанного следует, что необходимо стремиться к таким постановкам электродинамических задач, в которых оператор A будет сильно эллиптическим. Тогда вопрос о сходимости метода Галеркина будет сводиться к выбору базисных функций, обладающих свойством аппроксимации.

Ниже предлагается использовать гибридную формулировку задачи с представлением поля во внешней области с помощью функции Грина. Естественно, фиктивная поверхность S выбирается таким образом, чтобы было возможно построить функцию Грина во внешности S. Поэтому в работе выбрана сфера, хотя все результаты (о сильной эллиптичности задачи) остаются в силе и для произвольной кусочно-гладкой поверхности S.

2 Задача для системы уравнений Максвелла

В параграфе 2 рассматривается векторная задача дифракции стороннего электромагнитного поля на системе идеально проводящих тел Ω. Конечная область пространства заполнена средой с кусочно-непрерывными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$. Рассматривается традиционная постановка для системы уравнений Максвелла. Эта задача была рассмотрена, например, в [2].

В этом параграфе доказывается, что такая постановка задачи дифракции приводит к неэллиптическому оператору, отвечающему гибридной формулировке задачи. Точнее, устанавливается, что основной оператор ("блок") в блочной операторной матрице, отвечающей уравнению в объеме, не будет эллиптическим. Отсюда следует, что и весь оператор задачи также не будет эллиптическим. Поэтому, с нашей точки зрения, постановку задачи, основанную на системе уравнений Максвелла, следует "отвергнуть". Отметим, что неэллиптичность задачи в данном случае не связана с поверхностными уравнениями, неиспользованием функций Грина и т.д.

Пусть $\Omega \subset R^3$ – система ограниченных непересекающихся тел с кусочно-гладкими (замкнутыми) граничными поверхностями $\partial\Omega$. Пусть S – замкнутая поверхность, содержащая Ω так, чтобы $S \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Обозначим внешность S через V_+, а внутреннюю часть S без $\bar{\Omega}$ – через V_-; $R^3 = V_+ \cup V_- \cup S \cup \bar{\Omega}$.

Пусть в области V_+ задано падающее поле $E^0(x)$, $H^0(x)$, $x \in V_+$. Требуется определить **полное** поле $E(x)$, $H(x)$, которое имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{matrix} E_+(x) + E^0(x) \\ H_+(x) + H^0(x) \end{matrix} & x \in V_+, \\ \begin{matrix} E_-(x) \\ H_-(x) \end{matrix} & x \in V_-. \end{cases} \tag{6}$$

В силу представления (6) все условия в V_- будут только однородными.

Параметры среды в V_- описываются функциями $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$, которые предполагаются кусочно-непрерывными. В области V_+ ε_0 и μ_0 – вещественные положительные константы; $\omega > 0$ – круговая частота. Поверхности разрыва $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ предполагаются совпадающими и кусочно-гладкими и обозначены через Γ.

Рассмотрим следующую краевую задачу для системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} rot\ E = i\omega\mu H \\ rot\ H = -i\omega\varepsilon E, \end{cases} \text{ в } V_- \tag{7}$$

$$\begin{cases} rot\ E_+ = i\omega\mu_0 H_+ \\ rot\ H_+ = -i\omega\varepsilon_0 E_+, \end{cases} \text{ в } V_+ \tag{8}$$

$$E_\tau|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

$$[E_\tau]_\Gamma = 0, \tag{10}$$

$$[H_\tau]_\Gamma = 0, \tag{11}$$

$$[E_\tau]_S = 0, \tag{12}$$

$$[H_\tau]_S = 0, \tag{13}$$

$$e_r \times E_+ + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} e_r \times (e_r \times H_+) = o(r^{-1}), \tag{14}$$

при $r := |x| \to \infty$ (e_r - единичный вектор, $e_r := \dfrac{x}{|x|}$). Здесь индекс τ означает взятие касательных к поверхности составляющих векторного поля, а скобки $[\,\cdot\,]$ - разность следов функции с разных сторон поверхности.

В области V_- запишем "слабую" (вариационную) формулировку задачи для решения E, H:

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{V_-}\left(\frac{1}{\varepsilon}\, rot\, H\cdot rot\, \bar{t} \quad - \quad \omega^2\mu H\cdot\bar{t}\right)dx + i\int\limits_{S}\bar{t}\cdot(E\times n)\,dS = 0$$

$$\forall \quad t\in L_{2,Rot}(V_-). \tag{15}$$

Решение E, H ищем в пространстве

$$L_{2,Rot}(V_-) := \{E, H\in L_2(V_-);\quad rot\, E,\ rot\, H\in L_2(V_-)\}.$$

Если к (15) добавить второе уравнение в (7)

$$rot\, H = -i\omega\varepsilon\, E,$$

то вариационная формулировка задачи будет эквивалентна уравнениям (7), краевым условиям (9), условиям сопряжения (10), (11), понимаемым в смысле распределений.

В области V_+ запишем интегральное представление для полей E_+, H_+:

$$\frac{1}{\eta_0}E_+(x) = rot\int\limits_S M_0(y)\Phi(x,y)\,dS_y + \frac{1}{ik_0}\, rot\, rot\int\limits_S J_0(y)\Phi(x,y)\,dS_y, \tag{16}$$

$$H_+(x) = -rot\int\limits_S J_0(y)\,\Phi(x,y)\,dS_y + \frac{1}{ik_0}\, rot\, rot\int\limits_S M_0(y)\,\Phi(x,y)\,dS_y, \tag{17}$$

где $M_0(y) = -n(y)\times E_+(y)|_S$, $J_0(y) = n(y)\times H_+(y)|_S$ - неизвестные магнитный и электрический поверхностные токи; n - внешняя нормаль к V_-; $\Phi(x,y) := \dfrac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Здесь $M_0\in H^{-1/2}(S)$, $J_0\in H^{-1/2}(S)$ - касательные векторные поля (точнее, сечения векторных расслоений над S).

Определения и свойства пространств H^s изложены, например, в [5].

Из (13) имеем:

$$\int_S (n \times H_- - J_0) \cdot (n \times \bar{U})\, dS = \int_S (n \times H^0)(n \times \bar{U})\, dS \tag{18}$$

для любой функции $(n \times U) \in H^{1/2}(S)$. Условие (18) эквивалентно (13).

Кроме того, из (12)

$$\int_S (E_- \times n - M_0) \cdot \bar{t}|_S \, dS = \int_S (E^0 \times n) \cdot \bar{t}\big|_S \, dS \tag{19}$$

или, что эквивалентно,

$$M_0 = E_- \times n - E^0 \times n.$$

Тогда вместо (15) получаем

$$\frac{1}{\omega} \int_{V_-} \left(\frac{1}{\varepsilon} rot\, H \cdot rot\, \bar{t} - \omega^2 \mu H \bar{t} \right) dx +$$

$$+ i \int_S M_0 \cdot \bar{t}\, dS = -i \int_S (E^0 \times n) \cdot \bar{t}\, dS. \tag{20}$$

Из (16) – (17) с помощью векторной функции Грина можно получить выражение для J_0 через M_0:

$$J_0(x) = \int_S D_x \left(\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x,y) \right) M_0(y)\, dS_y, \tag{21}$$

где D_x – некоторый дифференциальный оператор.

Введем новые неизвестные функции

$$M := M_0 + E^0 \times n\big|_S ; \quad J := J_0 + n \times H^0\big|_S .$$

Тогда уравнение (20) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\omega} \int_{V_-} \left(\frac{1}{\varepsilon} rot\, H \cdot rot\, \bar{t} - \omega^2 \mu H \cdot \bar{t} \right) dx + i \int_S M \cdot \bar{t}\, dS = 0;$$

уравнение (19) – к виду

$$\int_S (n \times tr\, H - J)(n \times \bar{U})\, dS = 0;$$

уравнение (21) – к виду

$$J(x) = \int_S D_x \left(\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x,y) \right) M(y)\, dS_y + f(x),$$

где $f(x) := n \times H^0|_S - \int_S \left(\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x,y) \right) (E_0 \times n|_S)\, dS.$

Квадратичная форма оператора A, определяемого первым интегралом в (20),

$$a(H,t) := \frac{1}{\omega} \int_{V_-} \left(\frac{1}{\varepsilon}\, rot\, H \cdot rot\, \bar{t} - \omega^2 \mu H \cdot \bar{t} \right) dx, \qquad (22)$$

согласно формулам

$$a(H,t) = (AH,t), \quad \forall\, t \in L_{2,Rot}(V_-),$$

$$A \; : \; L_{2,Rot}(V_-) \to L'_{2,Rot}(V_-),$$

не является коэрцитивной. Действительно, если $rot\, H = 0$, то формула (22) отрицательно определена (при вещественных ε и μ), а при $rot\, H \neq 0$ и малых ω – положительно определена. Отсюда следует, что оператор A, а значит и полный оператор для всей задачи, **не будет сильно эллиптическим**.

Таким образом, для получения свойства эллиптичности необходимо изменять постановку задачи и переходить от системы уравнений Максвелла к эквивалентной краевой задаче.

3 Сильная эллиптичность задачи для векторного уравнения Гельмгольца

В параграфе 3 рассматривается та же задача, что и в параграфе 2. Отличие состоит в том, что мы рассматриваем не систему уравнений Максвелла, а систему уравнений Гельмгольца.

Эти задачи эквивалентны, но вторая приводит к эллиптическому оператору, отвечающему краевой задаче. Мы доказываем лишь эллиптичность основного оператора в операторной матрице, поскольку эллиптичность задачи сопряжения доказана в [3], а из эллиптичности краевой задачи сопряжения следует эллиптичность гибридной формулировки с использованием функций Грина.

Пусть $\Omega \subset R^3$ – система ограниченных непересекающихся тел с кусочно-гладкими (замкнутыми) граничными поверхностями $\partial\Omega$. Пусть S – замкнутая поверхность, содержащая Ω так, чтобы $S \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Обозначим внешность S через V_+, а внутренность S без $\bar{\Omega}$ – через V_-; $R^3 = V_+ \cup V_- \cup S \cup \bar{\Omega}$.

Рассмотрим задачу (6) – (13) с условиями излучения

$$\omega\mu_0 e_r \times H_+ + k_0 E_+ = o(|x|^{-1}), \quad E_+ = O(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \to \infty.$$

Основная идея следующих построений состоит в том, чтобы изменить условия сопряжения на S и Γ таким образом, чтобы видоизменить уравнения в области V_- и на поверхности S и получить **сильно эллиптический оператор**. При этом краевая задача сводится к эквивалентной краевой задаче. Эта идея предложена в [3]. Мы будем считать ε, μ, k кусочно-постоянными во всем пространстве R^3.

Предположим, что

$$\mathcal{R}e\,\varepsilon_j > 0, \quad \mathcal{I}m\,\varepsilon_j \geq 0, \quad \mu_j > 0.$$

Введем следующие условия сопряжения:

$$[E_\tau]_\Sigma = 0, \tag{23}$$

$$\left[\frac{1}{\mu}\bar{n} \times rot\,E\right]_\Sigma = 0, \tag{24}$$

$$[\varepsilon E_N]_\Sigma = 0, \tag{25}$$

$$[\lambda\, div\, E]_\Sigma = 0. \tag{26}$$

где $\Sigma = S \cup \Gamma$, $\lambda = \lambda_j$ в области $V_\pm$. Краевые условия на $\partial\Omega$ запишем в виде

$$E_\tau|_{\partial\Omega} = 0, \tag{27}$$

$$div\, E|_{\partial\Omega} = 0, \tag{28}$$

где под div понимается поверхностная дивергенция. Выберем $\lambda := \dfrac{1}{\mu\bar{\varepsilon}}$. Тогда, как показано в [3], задача (6) – (14) будет эквивалентна задаче

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad \text{в } V_-,$$

$$\Delta E_+ + k_0^2 E_+ = 0 \quad \text{в } V_+$$

с краевыми условиями (27), (28), условиями сопряжения (23) – (26) и условиями излучения

$$e_r \times rot\, E_+ - e_r\, div\, E_+ + ik_0 E_+ = o(|x|^{-1}), \qquad \text{при } |x| \to \infty.$$

В области V_- запишем "слабую" (вариационную) формулировку задачи для решения $E \left(H := \dfrac{1}{i\omega\mu} E \right)$:

$$\int\limits_{V_-} \frac{1}{\mu}(rot\, E \cdot rot\, \bar{t} + div\, E \cdot div\, \bar{t} - k^2 E \cdot \bar{t})\, dx$$

$$- \int\limits_S \bar{t} \cdot \left(-\bar{n} \times rot \left(\frac{1}{\mu} E \right) + \bar{n} \cdot \frac{1}{\mu} div\, E \right) dS = 0, \tag{29}$$

$$\forall\, t \in \hat{H}^1(V_-), \quad \text{где}$$

$$\hat{H}^1(V_-) := \left\{ E \in H^1(V_-) \ : \ E_\tau|_{\partial\Omega} = 0, \quad div\, E|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Так как полуторалинейная форма

$$a(E, t) := \int\limits_{V_-} \frac{1}{\mu}(rot\, E \cdot rot\, \bar{t} + div\, E \cdot div\, \bar{t})\, dx$$

является коэрцитивной на пространстве $\hat{H}^1(V_-)$, оператор рассматриваемой краевой задачи будет сильно эллиптическим [3, 4].

Используя функцию Грина $G_D(x, y)$, мы получим представление для поля $E_+(x)$ во внешности сферы [7]

$$E_+(x) = \int\limits_S (grad_y\, G_D(x, y)) \times (E_+(y) \times n(y))|_S\, dS_y; \quad |x| > R.$$

Введем неизвестные функции

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &:= E_+(x)\cdot n(x)|_S\,, \quad x\in S, &(30)\\ \Psi_0(x) &:= E_+(x)\times n(x)|_S\,, \quad x\in S \ \ (\Psi_0=\vec{\Psi}_0).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}E_+(x) &= \int\limits_S (grad_y\, G_D(x,y))\times\Psi_0(y)\,dS_y + &(31)\\ &+ \int\limits_S (grad_y\, G_D(x,y))\,\varphi_0(y)\,dS_y; \quad |x|>R.\end{aligned}$$

Поскольку

$$grad_y\, G_D(x,y)|_{y\in S} = n(y)\frac{\partial G_D(x,y)}{\partial n_y},$$

то

$$\begin{aligned}E_+(x) &= \int\limits_S \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y)\,n(y)\times\Psi_0(y)\,dS_y +\\ &+ \int\limits_S \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y)\,n(y)\,\varphi_0(y)\,dS_y; \quad |x|>R.\end{aligned}$$

Далее,

$$grad_x\,\frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y)\bigg|_{x\in S} = n(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x,y)\right)\bigg|_{x\in S},$$

если $x\neq y$; $x\in S$, и $y\in S$. Тогда мы получаем уравнения

$$\begin{aligned}div\,E_+(x) &= \int\limits_S\left(grad_x\,\frac{G_D(x,y)}{\partial n_y}\right)\cdot(n(y)\times\Psi_0(y))\,dS_y + &(32)\\ &+ \int\limits_S\left(grad_x\,\frac{G_D(x,y)}{\partial n_y}\right)\cdot n(y)\varphi_0(y)\,dS_y, \quad |x|>R,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}rot\,E_+(x) &= \int\limits_S\left(grad_x\,\frac{G_D(x,y)}{\partial n_y}\right)\times(n(y)\times\Psi_0(y))\,dS_y + &(33)\\ &+ \int\limits_S\left(grad_x\,\frac{G_D(x,y)}{\partial n_y}\right)\times n(y)\varphi_0(y)\,dS_y, \quad |x|>R.\end{aligned}$$

Обозначим

$$J(x,\, y) := \frac{\partial^2 G_D(x,\, y)}{\partial n_x \partial n_y}; \quad x, y \in S.$$

Отметим, что $J(x, y) = J(y, x)$, функция J является симметричной относительно x и y поскольку функция Грина $G_D(x, y)$ также симметрична относительно x и y.

Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned}
& \int\limits_S \bar{t}(x)\left[-n(x) \times rot\, E_+(x)|_S + n(x) div\, E_+(x)|_S\right] dS_x = \\
= & \int\limits_S \left[-rot\, E_+(x)\,|_S \cdot (\bar{t}(x) \times n(x)) + \right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + (\bar{t}(x) \cdot n(x))\; div E_+(x)|_S\right] dS_x = \\
= & \int\limits_S \left[-rot\, E_+(x)\,\Big|_S \cdot \bar{U}(x) + \bar{u}(x)\, div\, E_+(x)\Big|_S\right] dS_x = \\
= & \iint\limits_{S\,S} \left[J(x, y)(n(x) \times \bar{U}(x)) \cdot (n(y) \times \Psi_0(y)) + \right. \\
+ & \; J(x, y)\left(n(x) \times \bar{U}(x)\right) \cdot (n(y)\varphi_0(y)) + \\
+ & \; J(x, y)\,(n(y) \times \Psi_0(y)) \cdot (n(x)\bar{u}(x)) + \\
+ & \; J(x, y)\,(n(x)\bar{u}(x)) \cdot (n(y)\varphi_0(y)) \left.\right] dS_x\, dS_y,
\end{aligned}$$

где

$$U(x) := t(x) \times n(x), \quad u(x) := t(x) \cdot n(x);$$

и $t(x)$ – векторное поле.

Любое векторное поле $V(x)$ на поверхности S может быть представлено через касательную и нормальную составляющие в форме [3]:

$$V(x) = V_n(x) + V_\tau(x) \equiv n(n \cdot V(x)) + (-n \times (n \times V(x))).$$

Введем оператор следа на поверхности S:

$$(tr\, V)(x) = V(x)|_S = V(x), \quad x \in S;$$

(след различен с разных сторон поверхности S). Тогда

$$\begin{aligned} n(x)u(x) &= t_n(x), \\ n(x)\times U(x) &= -n\times(n\times t(x)) = t_\tau(x), \\ n(x)\varphi_0(x) &= (E_+(x))_n, \\ n(x)\times\Psi_0(x) &= -n\times(n\times E_+(x)) = (E_+(x))_\tau, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_S \bar{t}(x)\,[-n(x)\times rot\,E_+(x)\,|_S + n(x)\,div\,E_+(x)|_S]\,dS_x =$$

$$= \iint\limits_{S\,S} J(x,y)(tr\,E_+(y))\cdot(tr\,\bar{t}(x))\,dS_x\,dS_y. \tag{34}$$

Из условий сопряжения (23) и (25) на поверхности S (они называются “главными” условиями)

$$\hat{\varepsilon}\,tr\,E_- - tr\,E_+ = tr\,E_0$$

или

$$tr\,E_+ = \hat{\varepsilon}\,tr\,E_- - tr\,E_0, \tag{35}$$

где $\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и ε_r относительная диэлектрическая проницаемость в V_- (в окрестности поверхности S), а

$$\hat{\varepsilon}\,tr\,E_- = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E_-)_n \\ (E_-)_\tau \end{pmatrix} = \varepsilon_r(E_-)_n + (E_-)_\tau.$$

Используя соотношение (35) мы исключаем функцию $E_+(y)$ из уравнения (34) и получаем соотношение

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_S \bar{t}(x)\,[-n(x)\times rot\,E_+(x)\,|_S + n(x)\,div\,E_+(x)|_S]\,dS_x =$$

$$= \iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu}J(x,y)\,(\hat{\varepsilon}\,tr\,E_-(y))\cdot\overline{(\hat{\varepsilon}\,tr\,t(x))}\,dS_x\,dS_y -$$

$$- \iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu}J(x,y)\,(tr\,E_0(y))\cdot\overline{(\hat{\varepsilon}\,tr\,t(x))}\,dS_x\,dS_y. \tag{36}$$

Принимая во внимание условия сопряжения (24) и (26) мы окончательно получаем вариационное соотношение

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{V_-} \frac{1}{\mu}\left(rot\, E \cdot rot\, \bar{t} + div\, E\, div\, \bar{t} - k^2 E \cdot \bar{t}\right) dx - \\
-\ &\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} J(x,y)\,(\hat{\varepsilon}\, tr\, E(y)) \cdot \overline{(\hat{\varepsilon}\, tr\, t(x))}\, dS_x\, dS_y = \qquad (37)\\
=\ &-\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} J(x,y)\,(tr\, E_0(y)) \cdot \overline{(\hat{\varepsilon}\, tr\, t(x))}\, dS_x\, dS_y, \quad \forall\, t \in \hat{H}(V_-),
\end{aligned}$$

где $E = E_-$. Это уравнение определяет электрическое поле E в V_-. Запишем уравнение (37) в следующей форме

$$a(E,t) + j(\hat{\varepsilon}\, tr\, E,\ \hat{\varepsilon}\, tr\, t) = j(tr\, E_0,\ \hat{\varepsilon}\, tr\, t); \quad \forall\, t \in \hat{H}(V_-), \qquad (38)$$

где полуторалинейные формы a и j определяются посредством формул

$$\begin{aligned}
a(E,t) &= \int\limits_{V_-} \frac{1}{\mu}\left(rot\, E \cdot rot\, \bar{t} + div\, E div\, \bar{t} - k^2 E \cdot \bar{t}\right) dx,\\
j(Q,q) &= -\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} J(x,y) Q(y) \cdot \bar{q}(x)\, dS_x\, dS_y.
\end{aligned}$$

Определим операторы A и J

$$\begin{aligned}
A &: \hat{H}(V_-) \rightarrow \hat{H}'(V_-),\\
J &: T\hat{H}(V_-) \rightarrow T\hat{H}'(V_-),
\end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
a(E,t) &= (AE,t), \ \forall\, t \in \hat{H}(V_-); \ E \in \hat{H}(V_-),\\
j(Q,q) &= \langle JQ, q\rangle, \ \forall\, q \in T\hat{H}(V_-); \ Q \in T\hat{H}(V_-).
\end{aligned}$$

Здесь $\hat{H}'(V_-)$ антидвойственное к $\hat{H}(V_-)$ пространство, $T\hat{H}(V_-)$ пространство следов элементов из $\hat{H}(V_-)$ а $T\hat{H}'(V_-)$ антидвойственное к нему пространство. Скобки $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают соотношения двойственности на паре пространств $\hat{H}'(V_-)$, $\hat{H}(V_-)$ и $T\hat{H}'(V_-)$, $T\hat{H}(V_-)$, соответственно.

Обозначим оператор следа через T,

$$TE := \hat{\varepsilon}\, tr\, E,$$

который является ограниченным в пространствах

$$T \ :\ \hat{H}(V_-) \to T\hat{H}(V_-).$$

Сопряженный оператор T^* также ограничен,

$$T^* \ :\ T\hat{H}'(V_-) \to \hat{H}'(V_-).$$

Введем новую неизвестную функцию (векторное поле на S) по формуле

$$\Phi := \hat{\varepsilon}\, tr\, E_-. \tag{39}$$

Тогда уравнение (38) можно переписать в виде

$$(AE, t) + \langle J\Phi, Tt\rangle = \langle JF_0, Tt\rangle, \quad \forall\, t \in \hat{H}(V_-),$$

где $F_0 := tr\, E_0$, или в операторной форме

$$AE + T^* J\Phi = T^* J F_0. \tag{40}$$

Соотношение (39) дает

$$-TE + \Phi = 0. \tag{41}$$

Домножим (41) на оператор

$$J^* \ :\ T\hat{H}'(V_-) \to T\hat{H}(V_-),$$

получим

$$-J^*TE + J^*\Phi = 0. \tag{42}$$

Оператор J^* ограничен и фредгольмов в силу сильной эллиптичности оператора J [4], и является непрерывно обратимым, поскольку внешняя задача Дирихле для сферы для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение. Поэтому из (42) следует также (41), и эти уравнения эквивалентны.

Теперь уравнения (40) и (42) можно объединить в общее уравнение с матричным блочным оператором

$$\begin{pmatrix} A & T^*J \\ -J^*T & J^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^*JF_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, эквивалентно,

$$A_0X = F, \quad A_0 \ : \ H \to H', \tag{43}$$

где

$$A_0 := \begin{pmatrix} A & T^*J \\ -J^*T & J^* \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} E \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} T^*JF_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $H = \hat{H}(V_-) \times T\hat{H}(V_-)$, $H' = \hat{H}'(V_-) \times T\hat{H}'(V_-)$ - декартово произведение пространств. Запишем выражение для квадратичной формы оператора A_0:

$$\begin{aligned}
(A_0X, X)_{H'H} &= (AE, E) + (T^*J\Phi, E) - \\
&- \langle J^*TE, \Phi\rangle + \langle J^*\Phi, \Phi\rangle = \\
&= (AE, E) + \langle J\Phi, TE\rangle - \langle TE, J\Phi\rangle + \langle \Phi, J\Phi\rangle = \\
&= (AE, E) + \langle J\Phi, TE\rangle - \overline{\langle J\Phi, TE\rangle} + \overline{\langle J\Phi, \Phi\rangle},
\end{aligned}$$

и,

$$\mathcal{R}e\,(A_0X, X)_{H'H} = \mathcal{R}e\,(AE, E) + \mathcal{R}e\,\langle J\Phi, \Phi\rangle.$$

Как отмечалось выше A - сильно эллиптический оператор. J также эллиптический оператор (см. доказательство в [3]). Следовательно, полный оператор задачи A_0 будет также сильно эллиптическим поскольку следующие оценки имеют место

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}e\,((A + K_A)E,\ E) + \mathcal{R}e\,\langle (J + K_J)\Phi, \Phi\rangle \geq \\
\geq \ &\lambda_A ||E||^2_{\hat{H}(V_-)} + \lambda_J ||\Phi||^2_{T\hat{H}(V_-)},
\end{aligned}$$

с некоторыми компактными операторами

$$\begin{aligned}
K_A \ &: \ \hat{H}(V_-) \ \to \ \hat{H}'(V_-), \\
K_J \ &: \ T\hat{H}(V_-) \ \to \ T\hat{H}'(V_-); \\
&\lambda_A > 0, \qquad \lambda_J > 0.
\end{aligned}$$

Операторное уравнение (43) можно записать в виде вариационного соотношения

$$(A_0X, Y)_{H'H} = (F, Y)_{H'H}, \quad \forall\, Y \in H,$$

или более подробно

$$\begin{aligned} &(AE, t) + \langle J\Phi, Tt\rangle - \overline{\langle Jv, TE\rangle} + \overline{\langle Jv, \Phi\rangle} = \\ &= \langle F_0, Tt\rangle \quad \forall\, t \in \hat{H}(V_-), \quad v \in T\hat{H}(V_-). \end{aligned} \tag{44}$$

Итак, предлагаемый метод базируется на вариационном соотношении (44), которое определяет сильно эллиптический оператор. Для применения метода Галеркина к решению задачи мы выбираем базисные функции $\{e_i\}_{i=1}^N \subset \hat{H}(V_-)$, $\{\varphi_l\}_{l=1}^M \subset T\hat{H}(V_-)$ для представления приближенного решения E^N, Φ^M в форме $E^N = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i\varphi_i$, $\Phi^M = \sum\limits_{l=1}^M \beta_l\varphi_l$ и решаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} &(AE^N, e_j) + \langle J\Phi^M, Te_j\rangle - \overline{\langle J\varphi_m, TE^N\rangle} + \overline{\langle J\varphi_m, \Phi^M\rangle} = \\ &= \langle JF_0, Te_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, N, \quad m = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{45}$$

Матрица системы линейных уравнений (45) имеет вид

$$\hat{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N+M},$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int\limits_{V_-} \frac{1}{\mu}(rot\, e_i \cdot rot\, \bar{e}_j + div\, e_i\, div\, \bar{e}_j - k^2 e_i \cdot e_j)\, dx, \\ &\quad i, j = 1, \ldots, N; \\ a_{ij} &= -\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} J(x, y)(\varphi_i(y)) \cdot (\overline{\hat{\varepsilon}\, tr\, e_j(x)})\, dS_x\, dS_y, \\ &\quad i = N+1, \ldots, N+M, \quad j = 1, \ldots, N; \\ a_{ij} &= \iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} \overline{J(x, y)}(\hat{\varepsilon}\, tr\, e_i(y)) \cdot (\overline{\varphi_j(x)})\, dS_x\, dS_y, \\ &\quad i = 1, \ldots, N, \quad j = N+1, \ldots, N+M; \\ a_{ij} &= -\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} \overline{J(x, y)}(\varphi_i(y)) \cdot (\overline{\varphi_j(x)})\, dS_x\, dS_y, \\ &\quad i, j = N+1, \ldots, N+M, \end{aligned} \tag{46}$$

а коэффициенты правой части $\hat{f}$ определяются посредством соотношений

$$
\begin{aligned}
\hat{f} &= \{f_j\}_{j=1}^{N+M}, \quad \text{где} \\
f_j &= -\iint\limits_{S\,S} \frac{1}{\mu} J(x,y)(tr\,E_0(y)) \cdot \overline{(\hat{\varepsilon}\,tr\,e_j(x))}\,dS_x\,dS_y, \; j = 1,...,N; \\
f_j &= 0; \quad j = N+1,\ldots,N+M.
\end{aligned}
$$

Тогда (45) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$\hat{A}b = \hat{f}, \tag{47}$$

где $b = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\ldots,\beta_M)^T$ - столбец неизвестных.

Сходимость метода Галеркина в этом случае следует из сильной эллиптичности оператора задачи и свойства аппроксимации для базисных функций. С помощью введения функции Грина удается исключить одно поверхностное уравнение на S. Таким образом, количество неизвестных при решении внешней краевой задачи будет меньше. Полный оператор задачи становится сильно эллиптическим. Это приводит к снижению размерности результирующей матрицы, отсутствию сложностей, связанных с согласованием поверхностных и объемных элементов. От объемных и поверхностных базисных функций требуется лишь свойство аппроксимации в соответствующем пространстве. Свойство комплексной симметричности (не самосопряженности!) основного разреженного блока матрицы сохраняется. Кроме того, гарантируется сходимость метода Галеркина.

Использование функции Грина незначительно усложняет задачу вычисления поверхностных интегралов, так как она имеет простой вид. Особенность функции Грина может быть выделена аналитически. Остаток (в виде ряда) представляет собой функцию без особенности, поэтому затраты, связанные с вычислением поверхностных интегралов, практически не возрастают.

Отметим, что в указанном подходе имеется возможность исключить поверхностное уравнение на S и решать сразу вариационное уравнение (37), рассматривая на S следы объемных элементов. При этом малый "плотный" блок матрицы, отвечающий поверхностному уравнению, рассредоточивается в большом "разреженном" блоке, размерность матрицы уменьшается. Однако вопрос об эффективности такого приема может быть решен только численно в результате сравнения конкретных расчетов.

Литература

[1] Salazar-Palma M., Garcia-Castillo I.E., Sarkar T.K. *Radiation Scattering from 3D Conducting Dielectric Structures Utilizing the Finite Element Method* // Proc. of Progress in Electromagnetics Research Symposium. July 13-17. 1998. Nantes. France. – P.467.

[2] Cwik T. *Coupling Finite Element and Integral Equation Solutions Using Decoupled Boundary Meshes* // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1992. – Vol.40, N.12. – P.1496–1504.

[3] Costabel M., Stephan E.P. *Strongly Elliptic Boundary Integral Equations for Electromagnetic Transmission Problems* // Proc. of the Royal Society of Edinburg. – 1988. – Vol.109A. – P.271–296.

[4] Kress R. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. Vol.82. – Springer-Verlag. New York Inc., 1989.

[5] Трибель X. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980.

[6] Смирнов Ю.Г. *Сильная эллиптичность гибридной формулировки для электромагнитной задачи дифракции* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2000. – Т.40, N.2. – С.286–299.

[7] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987.